Annales de l'Université Marien N'GOUABI, 2022 ; Numéro spécial : 66-83 Sciences et Techniques ISSN : 1815 – 4433 www.annalesumng.org



CARACTERISATION DES AGGLOMERATS DES FINES PARTICULES PAR COMBINAISON DES TECHNIQUES NUMERIQUES DE LA GEOMETRIE ALGORITHMIQUE ET LA METHODE DE MONTE-CARLO : DETERMINATION DE LA MORPHOLOGIE, DE LA COMPACITE ET DE LA POROSITE

CHARACTERISATION OF FINE PARTICLE AGGLOMERATES USING A COMBINATION OF ALGORITHMIC GEOMETRY AND MONTE CARLO TECHNIQUES: DETERMINATION OF MORPHOLOGY, COMPACTNESS AND POROSITY

M. NGOMO^{1,2}, A. KIMBONGUILA¹

 ¹ Laboratoire Mécanique – Energétique – Ingénierie (LMEI), Chaire Unesco en Sciences de l'Ingénieur de l'Ecole Nationale Supérieure Polytechnique de l'Université Marien NGOUABI, Brazzaville, République du Congo.
² CM IT CONSEIL – Département Ingénierie, Recherche et Innovation – 32 rue Milford HAVEN 10100 Romilly sur Seine, France.

E-mail

RESUME

La valorisation des fines particules dans les bétons constitue un enjeu majeur pour la fabrication de matériaux de construction répondant aux exigences de développement durable. En effet, les additions minérales sont souvent des déchets ou des sous-produits industriels qui sont nettement moins coûteux que le ciment et permettent également de réduire les émissions de gaz à effet de serre (CO_2). Toutefois, leur incorporation en quantité massive dans les bétons, en remplacement ou en substitution du ciment, accroît de façon importante leur demande en eau pour le maintien de leur ouvrabilité. Malheureusement, cette augmentation de la demande en eau constitue un frein à leur valorisation. En effet, cet ajout d'eau se fait au détriment des résistances mécaniques du béton à l'état durci. Cette augmentation de la demande en eau est souvent imputée à l'agglomération des fines particules qui, d'une part, modifie la distribution granulométrique des particules en suspension et, d'autre part, emprisonne une partie de l'eau interstitielle ; ceci a pour conséquence l'augmentation de la fraction volumique effective pouvant conduire à une augmentation de la viscosité des suspensions et même à des situations de blocage de l'écoulement. La microstructure des agglomérats doit ainsi être étudiée en fonction des paramètres caractéristiques de la suspension pour pouvoir déterminer leur morphologie, quantifier leur taille et l'eau qu'ils renferment. La compréhension des mécanismes d'agglomération de ces fines est un enjeu majeur pour l'optimisation des mélanges contenant des quantités importantes de fines particules. Ce travail est une contribution à la caractérisation des agglomérats de fines particules dans le béton : estimation de la morphologie, de la compacité et de la porosité. Son objectif principal est de contribuer à l'amélioration des méthodes de caractérisation des agglomérats en se basant sur les techniques numériques éprouvées. Notre contribution dans cet article consiste à proposer des solutions alternatives pour pallier aux limites des méthodes actuelles. Nous appliquons les techniques numériques de la géométrie algorithmique combinées à la méthode de Monte Carlo. Plus précisément, nous considérons la population des fines particules (nuage de points) qui constituent l'agglomérat et nous déterminons la géométrie (morphologie) de l'agglomérat en considérant son enveloppe convexe enveloppante et son volume déterminé par la méthode de Monte Carlo. Le calcul du volume de l'enveloppe convexe enveloppante

de l'agglomérat nous permet ensuite de quantifier l'eau immobilisée dans les flocs et de déduire sa compacité et sa porosité. Dans cette étude, les fondamentaux de l'analyse fractale sont développés ainsi que les différents paramètres caractéristiques des agglomérats de fines particules. Les techniques de la géométrie algorithmique (convexité et enveloppe convexe notamment) sont aussi rappelées et appliquées sur des populations de fines particules. La compacité et la porosité de l'agglomérat sont estimées à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Les résultats obtenus sont analysés et confrontés à ceux obtenus avec d'autres méthodes connues dans la littérature : méthode du cube digitalisée pour l'approximation du contour effectif de l'agglomérat et de sa compacité locale, méthodes d'estimation de la compacité des agglomérats à partir des volumes enveloppants (sphère enveloppante, cube enveloppant, méthode d'analyse des photographies hémisphériques des coupes de béton, ...), etc. Cette étude comparative met en évidence les gains de notre approche.

Mots-clés: Agglomérat de fines particules, analyse des photographies hémisphériques, géométrie algorithmique, convexité, enveloppement convexe, méthode de Monte-Carlo, morphologie, compacité, porosité.

ABSTRACT

The recovery of fine particles in concrete is a major challenge for the manufacture of construction materials that meet the requirements of sustainable development. Indeed, mineral additions are often waste products or industrial by-products which are much less expensive than cement and also make it possible to reduce greenhouse gas (CO2) emissions. However, their incorporation in massive quantities in concretes, as a replacement or substitution for cement, significantly increases their demand for water to maintain their workability. Unfortunately, this increase in water demand is a hindrance to their use. In fact, this addition of water is detrimental to the mechanical resistance of the concrete in the hardened state. This increase in water demand is often attributed to the agglomeration of fine particles which, on the one hand, modifies the particle size distribution of the particles in suspension and, on the other hand, traps part of the interstitial water; this results in an increase in the effective volume fraction which can lead to an increase in the viscosity of the suspensions and even to situations of blocking of the flow. The microstructure of the agglomerates must therefore be studied as a function of the characteristic parameters of the suspension in order to determine their morphology, quantify their size and the water they contain. Understanding the agglomeration mechanisms of these fines is a major challenge for the optimisation of mixtures containing large quantities of fine particles. This work is a contribution to the characterization of agglomerates of fine particles in concrete: estimation of morphology, compactness and porosity. Its main objective is to contribute to the improvement of methods for characterizing agglomerates based on proven digital techniques. Our contribution in this paper consists in proposing alternative solutions to overcome the limitations of current methods. We apply the numerical techniques of algorithmic geometry combined with the Monte-Carlo method. Specifically, we consider the population of fine particles (scatter plot) that constitute the agglomerate and determine the geometry (morphology) of the agglomerate by considering its enveloping convex envelope and its volume determined by the Monte Carlo method. The calculation of the volume of the convex envelope of the agglomerate then allows us to quantify the water immobilised in the flocs and to deduce its compactness and porosity. In this study, the fundamentals of fractal analysis are developed as well as the different characteristic parameters of fine particle agglomerates. The techniques of algorithmic geometry (convexity and convex envelope in particular) are also recalled and applied to populations of fine particles. The compactness and porosity of the agglomerate are estimated using the Monte-Carlo method. The results obtained are analysed and compared with those obtained with other methods known in the literature: digitised cube method for the approximation of the effective contour of the agglomerate and its local compactness, methods for estimating the compactness of agglomerates from enveloping volumes (enveloping sphere, enveloping cube, method of analysing hemispherical photographs of concrete sections, etc.). This comparative study highlights the gains of our approach.

Keywords : Agglomerate of fine particles, analysis of hemispherical photographs, algorithmic geometry, convexity, convex envelopment, Monte-Carlo method, morphology, compactness, porosity.

INTRODUCTION

L'agglomération est un phénomène général qui intervient dans de très nombreux contextes, qu'ils soient naturels ou industriels. La diversité des thématiques concernées en fait un phénomène très étudié. La valorisation des fines particules dans les bétons constitue assurément un enjeu majeur pour la fabrication de matériaux de construction répondant aux exigences de développement durable. En effet, les additions minérales sont souvent des déchets ou des sous-produits industriels qui sont nettement moins coûteux que le ciment et permettent également de réduire les émissions de gaz à effet de serre (CO_2) . Dans le domaine du génie civil. l'agglomération des fines minérales (ciment, fillers, etc.) conditionne de manière déterminante le comportement rhéologique des suspensions cimentaires [Gallias 2000] [Bouzoubaâ & M.Lachemi 2001] [Bessa-Badreddine 2004] [Neville 2000] [Kara-Ali 2002] [LOOTENS 2004]. En effet, l'agglomération conduit à la formation de réseaux poreux de particules contenant une partie de l'eau libre de la suspension et modifie également la distribution et la taille des particules en suspension. Déterminer la géométrie réelle des agglomérats est alors d'une grande importance afin de maitriser leur morphologie et d'appliquer des modèles rhéologiques permettant de prédire la suspension. viscosité de la La microstructure des agglomérats doit ainsi être étudiée en fonction des paramètres caractéristiques de la suspension pour pouvoir quantifier leur taille et l'eau qu'ils renferment. compréhension La des mécanismes d'agglomération de ces fines devrait permettre à terme d'adapter les méthodes de formulation utilisées pour les bétons conventionnels et d'optimiser les des quantités mélanges contenant importantes de fines particules. Mais, comment accéder aux caractéristiques des agglomérats, particulièrement la part ou la proportion d'eau emprisonnée dans les flocs De cette problématique découle ?

l'approche d'Analyse fractale comme outil mathématique d'analyse et de caractérisation des agglomérats [KIMBONGUILA 1993], particulièrement la détermination de la part d'eau emprisonnée dans les flocs. Les méthodes de caractérisation utilisées pour le calcul de dimension fractale (méthode la_ de comptage de cubes, méthode de volume enveloppante) ont montré quelques inconvénients. Il s'agit de l'importance des erreurs d'estimation et la limitation du domaine d'application [KIMBONGUILA 1993]. Pour pallier ces limites, nous utilisons dans cette étude les techniques de la géométrie algorithmique, notamment les algorithmes de détermination de l'enveloppement convexe d'un ensemble de points, appliquée aux particules fines d'un agglomérat ou d'une coupe d'agglomérat de béton pour déterminer sa géométrie. La détermination de la géométrie de l'agglomérat permet de déduire sa compacité et sa porosité.

Ce travail est une contribution à la caractérisation de la microstructure des agglomérats de fines particules dans le béton : estimation de la morphologie, de la compacité et de la porosité. Son objectif principal est de contribuer à l'amélioration des méthodes de caractérisation des agglomérats en se basant sur les techniques numériques éprouvées. Notre contribution dans cet article consiste à proposer des solutions alternatives pour réduire ces erreurs. Nous appliquons les techniques numériques de la géométrie algorithmique combinées à la méthode de Monte Carlo [Nicholas Metropolis 1987] [Nicholas Metropolis 1949] [Eric C. Anderson 1999]. Plus précisément, nous considérons la population des fines particules (nuage de points) qui constituent l'agglomérat et nous déterminons la géométrie (morphologie) de l'agglomérat en considérant son enveloppe convexe enveloppante et son volume déterminé par la méthode de Monte Carlo. Le calcul du volume de l'enveloppe convexe enveloppante de l'agglomérat nous

de quantifier l'eau permet ensuite immobilisée dans les flocs et de déduire sa compacité et sa porosité. Dans cette étude, les fondamentaux de l'analyse fractale sont développés ainsi que les différents paramètres caractéristiques des agglomérats de fines particules. Les techniques de la géométrie algorithmique (convexité et enveloppe convexe notamment) sont aussi rappelées et appliquées sur des populations de fines particules. La compacité et la porosité de l'agglomérat sont estimées à l'aide de la méthode de Monte Carlo. Les résultats obtenus sont analysés et confrontés à ceux obtenus avec d'autres méthodes connues dans la littérature : méthode du cube digitalisée pour l'approximation du contour effectif de l'agglomérat et de sa compacité locale, méthodes d'estimation de la compacité des agglomérats à partir des enveloppants volumes (sphère enveloppante, cube enveloppant, méthode d'analyse photographies des hémisphériques des coupes de béton, ...), etc. Cette étude comparative met en évidence les gains de notre approche.

II. ETAT DE L'ART

II.1 Agglomération des fines particules

La compréhension des mécanismes d'agglomération durant lesquels des particules initialement isolées s'associent entre elles pour former des agglomérats, est d'une importance capitale pour connaître la taille finale et la morphologie des agglomérats qui déterminent les propriétés du produit final. L'agglomération est un processus par lequel deux ou plusieurs particules initialement dispersées se rencontrent sous l'action des forces attractives et adhérent de manière définitive pour constituer un agglomérat dont la taille croit avec le temps. Les études numériques l'agglomération menées sur et la. fragmentation disponibles dans la littérature peuvent être scindées en deux groupes : les unes qui s'intéressent à la formation des agglomérats et les autres qui mettent l'accent sur la caractérisation des agglomérats. Notre étude porte sur la caractérisation de la microstructure des agglomérats.

II.2 Caractérisation de la microstructure des agglomérats

II.2.1 Approche fractale appliquée aux agglomérats

Approche fractale

La théorie des fractales, développée par Mandelbrot [Mandelbrot 1983] [Mandelbrot 1998] [QUEIROS-CONDE & al. 2015], est un moyen de description des formes géométriques irrégulières (courbe, surface ou volume) qui se créent en suivant les règles déterministes. Les objets qui peuvent y être décrits doivent avoir des détails similaires à des échelles arbitrairement petites ou grandes et être statistiquement exactement ou autosimilaires, c'est-à-dire que le tout doit être semblable à une de ses parties. Le paramètre quantitatif le plus important est la dimension fractale (ou dimension de Hausdorff). En utilisant les notions introduites par Mandelbrot [Mandelbrot 1983] [Mandelbrot 1998], Weitz et Oliveria [Weitz & M.Olivera 1984] [BERKANI 2019] montré qu'il était possible de traiter les agglomérats comme des objets fractals ou précisément comme des objets « quasifractals ». De nombreux auteurs ont ensuite utilisés ce concept pour étudier le comportement des agglomérats. L'analyse fractale est l'outil utilisé pour caractériser les agglomérats.

Morphologie des agglomérats fractals

La morphologie des agglomérats dépend de la physico-chimie et des conditions hydrodynamiques de leur formation ainsi que de leurs propriétés mécaniques intrinsèques. Cependant, réciproquement, la dynamique de l'agglomération dépend aussi de 1a morphologie des particules rentrant en collision. Les objets obtenus lors de l'agglomération sont des agglomérats plus ou moins compacts contenant un nombre

variable de particules primaires. De nombreux auteurs les qualifient de fractals. Depuis que l'on peut décrire précisément des formes régulières par des équations mathématiques, les propriétés des corps irréguliers sont souvent exprimées en utilisant certaines caractéristiques des corps réguliers, comme le diamètre équivalent d'une sphère par exemple. Cependant, certaines structures, comme celles des agglomérats, sont trop irrégulières pour être décrites de cette manière. La géométrie fractale est donc arrivée comme un nouvel outil mathématique pour le traitement de systèmes désordonnés, quelle que soit leur échelle. Un grand progrès a pu être réalisé avec l'introduction de ces modèles qui, plus réalistes d'un point de vue géométrique, permettent aussi une représentation théorique plus satisfaisante du transport des agrégats par le fluide, de leurs interactions hydrodynamiques et physico-chimiques, de leur fragmentation, ainsi que de leurs propriétés optiques par exemple.

Loi fractale

La description de la morphologie complexe consiste à caractériser, au moins de façon statique, la façon dont les N_p particules primaires qui constituent l'agglomérat ou leur masse sont distribuées dans l'espace. Comme évoqué dans le paragraphe précédent, ceci a été possible dès l'introduction du concept de fractales par Mandelbrot [98], c'est à dire des objets qui conservent la même structure quelle que soit l'échelle d'observation. Un agglomérat est dit fractal si sa distribution de masse comporte une certaine forme d'invariance d'échelle. La forme la plus répandue qui associe la taille de l'agglomérat à son nombre de particules primaires est appelée « loi fractale » et s'exprime à l'aide du rayon de giration R_g [Forest & Witten 1979] [Filippov, Zurita &Rosner 2000] [Sorensen 2001].

$$N_p = k_f (\frac{Rg}{r})^{Df}$$

où r est le rayon de particules primaires, D_f la dimension fractale de l'agglomérat comprise entre 1 et 3 et k_f le facteur encore appelé pré-facteur fractal [Veerapaneni & Wiesner 1996] [Thill 2006].

Différentes caractéristiques peuvent être calculées pour ainsi mieux étudier les agglomérats formés.

Dimension fractale

L'une des caractéristiques les plus étudiées à propos des agglomérats est la dimension fractale, celle-ci étant très explicite quant à la représentation de l'agglomérat ainsi formé et nous donne une meilleure idée sur la distribution de la matière au sein de l'amas. Cette valeur ne suffit pas à décrire les caractéristiques topologiques d'un agglomérat, mais demeure un outil indispensable quant à la densité de la matière dans un amas.

De nombreuses techniques sont utilisées et largement discutées dans la littérature comme par exemple dans la revue bibliographique effectué par Bushell et al l'étude comparative réalisée par ou Secrieru. La diffusion angulaire [Freltoft & Sinha 1986] [Sorensen & al. 1992] [Link & al. 2011], la mesure de la densité effective [VanGulijk & al. 2004], la méthode de comptage des boites, connue sous le nom de « Box-Counting » en anglais [Freltoft & Sinha 1986] [Sorensen & al. 1992] [Link & al. 2011], la fonction de densité d'autocorrélation de pair [Forest & Witten 1979] [Julien & Botet 1987] [Friedlander 2000] [Eggersdorfer & al. 2010] sont quelques-unes des méthodes disponibles.

Parmi les méthodes les plus efficaces pour calculer la dimension fractale d'un objet, la méthode par comptage de boites est de loin la plus utilisée [Vicsek 19921] [DOYON 2011]. Cette méthode a l'avantage d'être simple, mais aussi rapide en donnant une valeur de dimension fractale relativement bonne. Cette méthode présente cependant aussi des limitations, du fait qu'elle nécessite l'utilisation d'une image binaire. C'est aussi la plus utilisée et la plus abondamment documentée dans la littérature [Wozniak & al. 2012]. Elle est simple à implémenter et applicable pour des objets avec ou sans autosimilarité.

Principe de la méthode de comptage de boites (BCM)

La figure ci-dessous montre schématiquement quatre étapes de l'algorithme BCM. L'agglomérat est positionné au centre de la boîte qui servira grille dont les dimensions de sont maintenues fixes mais dont la taille de la maille ε varie progressivement par puissance de 2. Le raffinement se poursuit tant que la dimension linéaire de la maille est plus grande que la taille d'une particule primaire de l'agglomérat



Figure 1. Illustration de la méthode de box-Counting en deux dimensions (2D) pour différentes tailles de mailles ε [KIMBONGUILA 1993].

Les boîtes hachurées contiennent au moins une portion de l'agglomérat. L'itération 0 n'est pas prise en compte dans le calcul de la dimension fractale. A chaque étape de raffinement, le nombre de boîtes $N_B(\varepsilon)$ contenant au moins une portion de l'agglomérat est compté. Lorsque la taille de la maille ε diminue, $N_B(\varepsilon)$ augmente. Si l'agglomérat étudié est fractal, le nombre de boîtes $N_B(\varepsilon)$ nécessaire pour recouvrir entièrement l'agglomérat obéit à la loi de puissance : $N_B(\varepsilon) \approx (L/\varepsilon)^{D_b}$ où D_b est la dimension de box-counting.

La dimension de box-Counting ne diffère de la dimension fractale que dans des

cas très particuliers (et alors $D_b > D_f$). Ainsi, on identifie D_b à la dimension fractale de l'agglomérat, D_f . La convergence de la dimension fractale est obtenue lorsque la taille de la maille tend vers la taille d'une particule élémentaire de l'agglomérat a_i et la dimension fractale obtenue est comprise entre 1 et 3.

$$D_{\rm f} = \lim_{\epsilon \to a} \frac{\ln(N_B(\epsilon))}{\ln(L/\epsilon)}$$

De nombreux auteurs s'accordent sur le fait que seuls les agglomérats assez grands ($N_p > N_{p,lim}$) où N_p est le nombre de particules primaires dans l'agglomérat peuvent être considérés comme ayant une structure fractale. Cependant la valeur de $N_{p,lim}$ est sujette à controverses : elle varie de 5 à 16 selon les auteurs [Eggersdorfer & al. 2010]. Cette méthode possède quelques limitations notamment pour de gros agglomérats [KIMBONGUILA 1993]. En effet, la méthode nécessite le maillage du domaine complet, tridimensionnel de l'agglomérat à chaque itération, ce qui a pour conséquence d'augmenter le coût de calcul et de stockage de données. Il n'est pas nécessaire de procéder par itération puisque l'on peut directement utiliser un maillage dont la taille de la maille correspond à la taille d'une particule.

Le facteur de structure

Le facteur de structure est un paramètre souvent considéré comme secondaire dans les études morphologiques au profit de la dimension fractale qui intervient comme un terme de puissance. Une des raisons est que ce paramètre varie beaucoup en fonction des conditions expérimentales et des méthodes utilisées pour extraire les informations morphologiques. Néanmoins, on trouve de plus en plus des travaux à ce sujet [Sorensen & Roberts 1997] [Brasil & al.2001] [Liu & al.2009] [Shapiro & al.2012].

II.2.2 Méthode de caractérisation des agglomérats fractals : estimation de la compacité et de la porosité

La compacité d'un agglomérat est le rapport entre le volume solide total occupé par les particules primaires, V_s et le volume total effectif de l'agglomérat, V_{eff}

$$\phi_f = \frac{V_s}{V_{eff}}$$

Le volume solide total occupé par les particules primaires de l'agglomérat, V_a ne dépend que du nombre de particules N_p dans l'agglomérat et de leur rayon a_i . Nous verrons ci-dessous, comment est approché le volume effectif de l'agglomérat en fonction de l'approche utilisée. On peut d'ores et déjà constater que la compacité va dépendre de la méthode de calcul.

Méthode du cube digitalisée

Dans cette méthode, pour approcher le volume effectif de l'agglomérat, on utilise une subdivision uniforme en voxels du domaine contenant l'agglomérat. Nous l'appellerons « Méthode du Cube Digitalisée (MCD) ». La figure permet de d'illustrer en deux dimensions la subdivision du domaine de l'agglomérat.

Le volume effectif de l'agglomérat est donné par l'équation

 $V_{eff} = \sum_{k}^{N_{cut}} V_k$, où N_{cut} est le nombre total de voxels contenant au moins une portion de l'agglomérat, $V_k = d^3$ est le volume d'un voxel et d est la dimension linéaire d'un voxel.



Figure 2. Approximation en deux dimensions du contour effectif de l'agglomérat et de sa compacité locale.

La discrétisation utilisée permet à priori une description relativement réaliste de l'agglomérat. Toutefois, l'estimation du volume total effectif par cette méthode dépend étroitement du choix de la dimension des voxels.

• des voxels très petits devant la taille des particules ne permettent pas de tenir compte de la porosité « interne » de l'agglomérat (car ils risquent de n'être coupés par aucune particule, même s'ils sont situés à l'intérieur du floc).

• des voxels trop grands devant la taille des particules donneront en revanche

une description plus approximative du contour de l'agglomérat.

Ainsi, dans le cas des suspensions de particules polydisperses, la compacité calculée risque de dépendre de la taille des particules primaires dans l'agglomérat.

Méthodes des volumes enveloppants

La figure schématise les deux autres approches d'estimation du volume effectif de l'agglomérat. Elles sont certes différentes entre elles mais sont basées sur le même principe. La deuxième approche que nous nommerons « méthode du cube enveloppant » (Figure 4a)-) consiste à recouvrir le volume de l'agglomérat par un cube dont le côté $c=l_{max}$ est donné par la relation suivante : $l_{max} = \max(d_{ij}) +$ $a_i + a_j$

où d_{ij} est la distance entre les deux particules les plus éloignées de l'agglomérat

De même, dans la dernière approche, nommée « méthode de la sphère enveloppante » (Figure 4b), l'agglomérat est recouvert par une sphère enveloppante de rayon, $r = \frac{l_{max}}{2}$



a) - Cube enveloppant b) - Sphere enveloppante **Figure 3**. Estimation de la compacité des agglomérats à partir du cube et de la sphère enveloppante.

III. Application des techniques de géométrie algorithmique pour la caractérisation de la microstructure des agglomérats fractals

III.1 Justification

Devant les limitations dans l'application de la méthode (approche du cube digitalisé) d'un côté et la surestimation des résultats des approches du volume enveloppant (du cube enveloppant et de la enveloppante) sphère de l'autre [KIMBONGUILA 1993], nous avons été amené à utiliser des méthodes numériques de la géométrie algorithmique pour améliorer les méthodes de caractérisation agglomérats (estimation de des 1a compacité, de la proportion d'eau, etc.). La géométrie algorithmique [Boissonnat 2017] [Boissonnat & Yvinec 1995] [Goodman & O'Rourke1995] est un domaine situé à l'interface entre les mathématiques et l'informatique, étant tout particulièrement en lien avec la géométrie et la topologie, la statistique, la combinatoire, l'algorithme et la théorie des graphes, et aussi motivée par les nombreux domaines d'applications qui demandent de traiter de manière efficace des objets ou des masses de données géométriques. La géométrie algorithmique est une discipline apparue dans les années 1970 [Graham 1972] [Preparata & Hong 1977] traitant de problèmes géométriques sous l'angle algorithmique. La géométrie algorithmique tire ses références et entretien des liens étroits avec de nombreux domaines tels que : les mathématiques discrètes et combinatoires, la théorie des polytopes, la recherche opérationnelle, la théorie des graphes et l'informatique en général.

III.1.1 Inconvénients de la méthode par volume enveloppant

Les inconvénients des méthodes basées sur le cube et la sphère enveloppante résident dans l'approximation du contour. En effet, elles surestiment clairement le volume poreux de l'agglomérat.

III.1.2 Inconvénients de la méthode du cube digitalisé de boites

Elle dépend de la taille des particules.

- des voxels très petits devant la taille des particules ne permettent pas de tenir compte de la porosité « interne » l'agglomérat.

des voxels trop grands devant la taille des particules donnent en revanche une description plus approximative du contour de l'agglomérat.

de

III.2. Convexité et enveloppe convexe en géométrie algorithmique

III.2.1. Convexité et enveloppe convexe

III.2.1.1. Ensembles convexes en 2D

Un ensemble $A \subset \mathbb{R}^2$ est convexe lorsque pour tous points $p, q \in A$, le segment est inclus dans [p, q]. Par exemple, \mathbb{R}^2 et \emptyset sont convexes, un segment est convexe, un triangle, un disque (avec leur intérieur cela va de soi) sont convexes, etc.

III.2.1.2. Enveloppe convexe

Le calcul des enveloppes convexes l'un des problèmes constitue plus importants et étudiés de la géométrie algorithmique dès ses origines; ceci explique le vaste nombre de stratégies développées dans ce contexte dans la littérature. Les algorithmes d'enveloppe les plus populaires sont l'algorithme « Graham scan » [Graham 1972] et l'algorithme de « diviser-et-régner » [Preparata & Hong Preparata & Shamos 1984] 1977] & [Preparata Shamos 1985]. Les implémentations de ces deux algorithmes facilement disponibles sont (voir [O'Rourke 1998]). Les deux sont des algorithmes en temps O (n log n), mais le Graham a une constante d'exécution faible en 2D et s'exécute très rapidement. Cependant, l'algorithme de Graham ne se généralise pas à la 3D et aux dimensions supérieures alors que l'algorithme de diviser-et-régner a une extension naturelle. Il existe de nombreuses applications pour les enveloppes convexes : la prévention des collisions, la détermination de l'objet caché et l'analyse de la forme pour n'en nommer que quelques-unes. L'enveloppe convexe

C(A) d'un ensemble A de points du plan est la plus petite partie convexe du plan contenant A. Lorsque l'ensemble A est fini, l'ensemble C(A) peut être "calculé " par un certain nombre d'algorithmes [O'Rourke 1998] [Graham 1972] [Preparata & Hong 1977].



Figure 4. Convexité et enveloppe convexe

Dans un plan, l'enveloppe convexe peut être comparée à la région limitée par un élastique qui englobe tous les points qu'on relâche jusqu'à ce qu'il se contracte au maximum. L'idée serait la même dans l'espace avec un ballon qui se dégonflerait jusqu'à être en contact avec tous les points qui sont à la surface de l'enveloppe convexe. L'enveloppe convexe de A est la plus petite partie convexe de E qui contient A. Développé de façon plus détaillée, ce résultat caractérise l'enveloppe convexe Conv(A) comme l'unique sous-ensemble de E qui vérifie les trois conditions suivantes :

- Conv(A) est convexe ;
- A est inclus dans Conv(A);
- Si *C* est un sous-ensemble convexe de E contenant A, alors Conv(A) est inclus dans *C*.

Par exemple, $Conv(\emptyset) = \emptyset$

L'enveloppe convexe de A est l'ensemble des combinaisons convexes c'est-à-dire des barycentres à coefficients positifs ou nuls de familles de points de A. Autrement dit : les éléments de l'enveloppe convexe de A sont exactement les points x de E qu'on peut écrire sous la forme : $x=\sum_{i=1}^{p} \lambda_i a_i$, expression dans laquelle, les a_i représentent les agglomérats qui sont dans A, les coefficients λ_i sont réels positifs et de somme $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i = 1$.

III.2.2 Aspects algorithmiques : algorithmes et complexité

Le calcul de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est un problème classique en géométrie algorithmique. Il constitue l'un des problèmes plus importants et étudiés de la géométrie algorithmique dès ses origines : ce qui explique le vaste nombre de stratégies développées dans ce contexte. La conception d'une stratégie efficace pour le calcul des enveloppes convexes nécessite à la fois la compréhension du problème géométrique, ainsi que la maîtrise de structures de données et techniques algorithmiques [O'Rourke 1998] [Graham 1972] [Preparata & Hong 1977]. Plusieurs algorithmes ont été inventés pour résoudre ce problème, leur complexité varie :

En 2D	- - - -	Gift wrapping (1970) & Jarvis march ou marche de Jarvis (1973): <i>O</i> (h . n), étant le nombre de points ou d'agglomérats de l'enveloppe convexe ; Graham scan/ Parcours de Graham (19972): <i>O</i> (n . log(n)) Heuristique de AKL-Toussaint ; Quickhull (1977): <i>O</i> (n . log(n)) Divide and conquer (1977): <i>O</i> (n . log(n)) Monotone chain (1979) <i>O</i> (n) quand les points sont tries
	-	Monotone chain (1979) $O(n)$ quand les points sont tries Incremental covex hull (1984) : $O(n \cdot \log(n))$
	-	Algorithme de Chan's / Nielsen's algorithm (1996) : $O(n \cdot \log(n))$
	-	Utilisation du diagramme de Voronoi en $O(n \log(n))$: les points de l'enveloppe convexe définissent des cellules de Voronoi ouvertes, il suffit de détecter ces
		cellules et de relier les germes des cellules adjacentes.
En 3D	-	Algorithme de Chan's en 3D

Les algorithmes d'enveloppe les plus populaires sont l'algorithme « Graham scan » [Graham 1972] et l'algorithme de « diviser-etrégner » [Preparata & Hong 1977] [Preparata & Shamos 1984] [Preparata & Shamos 1985]. Les implémentations de ces deux algorithmes sont facilement disponibles (voir [O'Rourke 1998]). Les deux sont des algorithmes en temps O (n log n), mais le Graham a une constante d'exécution faible en 2D et s'exécute très rapidement. Cependant, l'algorithme de Graham ne se généralise pas à la 3D et aux dimensions supérieures alors que l'algorithme de diviser-et-régner a une extension naturelle. Nous ne considérons pas les algorithmes 3D ici [O'Rourke 1998] (voir pour plus d'informations).

III.3 Caractérisation des agglomérats par l'application des techniques de la géométrie algorithmique

III.3.1. Calcul de l'enveloppe convexe enveloppante d'un agglomérat

Soit P un ensemble de n points correspondant aux fines particules constituant un agglomérat. L'étude consiste en la caractérisation de la structure / la géométrie de l'agglomérat par l'utilisation des technique de la géométrie algorithmique, notamment les techniques de détermination de l'enveloppe convexe d'un ensemble de points. Les principaux paramètres à déterminer sont la compacité et la porosité.



Figure 5. Convexité et enveloppe convexe

Les fines particules étant de très petite taille, nous faisons l'hypothèse que chaque particule est ramenée à la taille d'un point du nuage de points constituant l'agglomérat. Etant donné un ensemble de points ou de fines particules d'un agglomérat, par application d'un algorithme de calcul d'enveloppe convexe nous obtenons ainsi l'enveloppe convexe enveloppante de l'agglomérat. Dans le cas où la taille des fines particules n'est pas négligeable, nous pouvons procéder à la digitalisation du contour des particules primaires en et ainsi obtenir un autre nuage de points.



Figure 6. Exemple d'échantillons des points des contours d'une particule primaire

On obtient ainsi un autre nuage de points enveloppant totalement les fines particules et permettant d'obtenir l'enveloppe convexe enveloppante. Ce traitement évite une perte du volume de l'enveloppe et permet d'envelopper la totalité des fines particules. Autrement, cet écart peut être important surtout si la taille (ou taille moyenne) des agglomérats est importante.

Une fois l'enveloppe convexe enveloppante obtenue, nous utilisant la méthode de Monte Carlo pour estimer le volume de l'enveloppe convexe enveloppante. Nous pouvons constater que le volume du cube ou du cercle enveloppant est plus grand que celui de l'enveloppe convexe enveloppante de l'agglomérat.

III.3.2. Estimation du volume de l'enveloppe convexe enveloppante

Pour déterminer le volume de l'enveloppe enveloppante convexe de l'agglomérat, nous utilisons la méthode de Monte Carlo pour l'estimation d'aires. En particulier, il s'agira d'utiliser la méthode de Monte Carlo pour calculer une valeur approchée de l'aire d'un polygone. La méthode de Monte Carlo [Nicholas Metropolis 1987] [Nicholas Metropolis 1949] [Eric C. Anderson 1999] pour le calcul de l'aire d'un polygone nécessite de trouver une forme géométrique rectangulaire contenant le polygone, dont on sait calculer l'aire, et dans laquelle on est capable de tirer des points uniformément au hasard. La valeur approchée de l'aire du polygone est donnée en fonction de la proportion du nombre de points qui sont dans le polygone, et de l'aire de la boîte

rectangulaire contenant le polygone. Soit donc une zone rectangulaire dont les côtés sont de longueurs connues. Au sein de cette aire se trouve l'enveloppe convexe dont la superficie est inconnue. Grâce aux mesures des côtés de la zone, on connaît l'aire du carré ou du rectangle. Pour trouver l'aire de l'enveloppe convexe, on génère N particules de manière aléatoire sur cette zone rectangulaire. On compte ensuite le nombre n de particules à l'intérieur de l'enveloppe ; on peut ainsi déterminer le nombre particules k=N-n qui sont générées dans l'enveloppe convexe. Il suffit ensuite d'établir un rapport entre les valeurs :

 $\frac{\text{air de l'enveloppe convexe}}{\text{air du rectangle}} = \frac{k}{N}$ $\Rightarrow \text{air de l'enveloppe convexe} = \frac{k}{N} \text{ x air du rectangle}$

Avec

 $\begin{cases} k = N - n \text{, nombre de particules} & d \\ n = \text{ nombres de particules restant sur le rectangle} \\ N = \text{ nombre de particules générées} \end{cases}$



Figure 7. Application de la méthode de Monte Carlo pour le calcul du volume de l'enveloppe convexe

La qualité de l'estimation s'améliore (lentement) en augmentant le nombre de tirs et en s'assurant que générateur aléatoire ne génère pas toujours le même point mais couvrent bien la zone rectangulaire, de manière uniforme. La qualité du générateur aléatoire est primordiale pour avoir de bons résultats dans la méthode de Monte Carlo. Le volume obtenu représente le volume total effectif de l'agglomérat, V_{eff} . Le le volume solide total occupé par les particules primaires étant connu, V_s , il nous reste à déterminer la compacité et la porosité de l'agglomérat.

IV. 2.3 Déduction de la compacité et de la porosité

Comme nous l'avons vu précédemment (section II.2.2), la compacité d'un agglomérat est le rapport entre le volume solide total occupé par les particules primaires, V_s et le volume total effectif de l'agglomérat, V_{eff} :

$$\boldsymbol{\phi}_f = \frac{V_s}{V_{eff}}$$

Suivant la relation donnée $\phi_f = \frac{V_S}{V_{eff}}$, on estime la compacité de l'agglomérat.

Le volume solide total occupé par les particules primaires de l'agglomérat, V_s ne dépend que du nombre de particules N_p dans l'agglomérat et de leur rayon r_i . Le volume des vides intra-flocs représente le volume occupé par une partie de l'eau interstitielle. Connaissant la compacité de l'agglomérat, sa porosité est déduite au travers d'une relation univoque entre la compacité et la proportion d'eau.

IV. 2.4 Synthèse de la méthode

:

L'approche adoptée consister donc en

- la détermination des points de contour selon le cas et à disposer d'un échantillon de points permettant d'effectuer le calcul de l'enveloppe convexe enveloppante de l'agglomérat,
- la détermination de l'enveloppe convexe de l'agglomérat (plus petite enveloppe convexe enveloppante),
- la détermination de la surface intérieure de l'enveloppe convexe enveloppante Sec par la méthode de Monte Carlo.
- une fois la surface de l'enveloppe convexe obtenue nous pouvons déduire la surface des poches d'eau en enlevant la surface totale des particules (zone en noire).
- nous pouvons alors déduire la compacité (resp. la porosité) de l'agglomérat en calculant la proportion de la surface totale des particules (resp. de la surface des poches d'eau) par

rapport à la surface de l'enveloppe convexe enveloppante.

IV. 2.5 Analyse des résultats

Le calcul de l'enveloppe convexe enveloppante est un résultat intéressant puisqu'il permet d'approcher de manière fine la morphologie de l'agglomérat de fines particules. Elle permet à la fois d'estimer la morphologie de l'agglomérat mais également de déterminer les paramètres de caractérisation des agglomérats qui sont le volume effectif de l'agglomérat, la compacité et la porosité de l'agglomérat.

IV. 2.6 Comparaison avec les méthodes actuelles

Le calcul de l'enveloppe convexe enveloppante est un résultat intéressant puisqu'il permet d'approcher de manière fine la morphologie de l'agglomérat de fines particules. Et donc d'approcher le volume effectif de l'agglomérat. Comparé au cercle ou cube enveloppant, nous obtenons un résultat plus

Les méthodes des volumes enveloppants



Figure 8. Comparaison cube enveloppant / sphère enveloppante et enveloppe convexe enveloppante

En reprenant l'exemple précédent d'estimation de la compacité des agglomérats à partir du cube et de la sphère enveloppante, nous pouvons constater l'importance de l'écart avec le cercle enveloppant (la partie blanche entre le cercle et l'enveloppe convexe). Cet écart montre bien que l'enveloppe convexe enveloppante obtenue est un meilleur candidat que le cercle enveloppant [Kimbonguila 1993]. Comparé à la différence de surfaces entre la surface du cercle enveloppant et la surface totale des particules, nous obtenant un résultat meilleur que celui avec le cercle enveloppant.

La méthode du cube digitalisée

Dans la méthode du cube digitalisé, la discrétisation utilisée permet à priori une description relativement réaliste de l'agglomérat. Pour approcher le volume effectif de l'agglomérat, on utilise une subdivision uniforme en voxels du domaine contenant l'agglomérat. Une comparaison avec l'enveloppe convexe montre que notre approche ne donne pas de meilleurs résultats que ceux de la méthode du cube digitalisé comme le montre la figure ci-dessous.



Figure 9. Approximation en deux dimensions du contour effectif de l'agglomérat et de sa compacité locale.

En revanche, l'approximation du volume de l'agglomérat avec la méthode du cube digitalisé peut être améliorée en considérant, non pas le volume des voxels qui touchent les particules, mais la proportion des particules dans chaque voxel, permettant ainsi de déterminer le volume occupé par les particules dans chaque voxel. Une fois de plus, ce résultat peut être obtenu en utilisant par Monte Carlo appliquée à chaque voxel ou par analyse d'image de la structure du cube digitalisé.

Méthode d'analyse d'images avec les logiciels GLA et CANOPEO

La compacité et la porosité obtenues ici peuvent être comparables avec celles obtenues avec l'analyse des photographies avec le logiciel GLA [BECKER 1971] [BONHOMME 1993] [Bréda & al. 2002] [Ducrey 1975a] [Ducrey 1975b] [GOND 2002] [GRANGEON 2006] [Ligot & Makels 2011] [Moutou 2020] [NGOMO 1991] [ROSS 1981] [Soudani & al. 2006] ou avec le logiciel CANOPEO, deux logiciels de calcul de l'indice foliaire d'un couvert végétal par photographie hémisphériques. Cependant, l'analyse des photographies avec le logiciel GLA ou CANOPEO ne nous a permis que le calcul de la compacité et de la porosité. Cette méthode ne permet pas de déterminer la morphologie de l'agglomérat.

VI Conclusion et perspectives

Une méthode de caractérisation de la microstructure des agglomérats basée sur des techniques de la géométrie algorithmique combinées avec la méthode de Monte Carlo a été présentée dans ce travail. Elle permet à l'équilibre du système, non seulement d'approcher la morphologie d'un agglomérat, mais également son volume, sa compacité et sa porosité. Comparée aux méthodes actuelles de caractérisation de la microstructure des agglomérats, notre approche donne des résultats meilleurs que ceux obtenus avec les méthodes de la sphère enveloppante et du cube enveloppant. Cependant, la méthode du cube digitalisé donne des meilleurs résultats d'approximation du contour (et par conséquent de la morphologie) et du volume de l'agglomérat. En revanche, l'approximation du volume de l'agglomérat avec la méthode du cube digitalisé peut être améliorée en considérant, non pas le volume des voxels qui touchent les particules, mais la proportion des particules dans chaque voxel, permettant ainsi de déterminer le volume occupé par les particules dans chaque voxels. Une fois de plus, ce résultat peut être obtenu en utilisant par Monte Carlo appliquée à chaque voxel ou par analyse d'image de la structure du cube digitalisé. L'approximation de la morphologie et du volume d'un agglomérat par son enveloppe convexe enveloppante (au lieu de

Généralisation de la méthode en 3D

la sphère enveloppante ou du cube enveloppant) est une approche qui nécessite une profonde analyse, notamment dans le cas des structures complexes.

Perspectives

Détermination de l'enveloppe enveloppante en étoile

Les résultats pour certaines formes d'agglomérats, l'enveloppe convexe enveloppante ne donne pas la vraie morphologie de l'agglomérat. Pour affiner le résultat en partant de cette enveloppe convexe enveloppante, on détermine les parties extérieures à l'agglomérat pour aboutir à une enveloppe en étoile plus proche de la morphologie de l'agglomérat et donc à une meilleure approximation des paramètres de caractérisation (Volume, compacité, porosité).



Figure 10. Enveloppe enveloppante en étoile pour affiner les résultats.

Cette approche permet de se rapprocher au plus près de la morphologie de l'agglomérat et par conséquent d'améliorer les résultats obtenus avec l'enveloppe convexe. Le calcul de l'enveloppe convexe enveloppante devient alors une étape intermédiaire du processus de détermination de l'enveloppe enveloppante en étoile.

En 3D, l'approche est la même, moyennant une complexité plus élevée de calcul. Nous pouvons déterminer ici l'enveloppe convexe enveloppante avec un calcul du volume intérieur de l'enveloppe convexe comme le montre les figures ci-dessous.



Figure 10.a. Enveloppant convexe



Figure 10.b. Cube enveloppant

enveloppante en 3D (Calcul de l'enveloppe convexe 3D par l'algorithme de Division-Fusion) En 3D, l'algorithme de Chain peut être utilisé pour le calcul de l'enveloppe convexe avec une complexité plus élevée qu'en 2D. Pour plus d'informations sur les algorithmes 3D, le lecteur peut se reporter à [O'Rourke 1998].

Bibliographie

1. [BECKER 1971] BECKER M., 1971. Une technique nouvelle d'utilisation des photographies hémisphériques pour la mesure du climat lumineux en forêt Ann. Sci. For., 28, 425-442. 1971

2. [BERKANI 2019] BERKANI SOUAD, les fractales et les systèmes complexes, Mémoire de Master, Faculté des Sciences exactes, Université de Béjaîa, 2018-2019.

3. [Bessa-Badreddine 2004] A.Bessa-Badreddine. Etude de la contribution des additions minérales aux propriétés physiques, mécaniques et de durabilité des mortiers. Thèse de doctorat, Université de Cergy-Pontoise, 2004.

4. [Boissonnat & Yvinec 1995] Jean-Daniel Boissonnat et Mariette Yvinec. Géométrie algorithmique. Ediscience international, Paris, 1995. Version anglaise : Algorithmic geometry. Cambridge University Press, 1998.

5. [Boissonnat 2017] Jean Daniel Boissonnat. Géométrie algorithmique : des données géométriques à la géométrie des données, Collège de France - Leçon inaugurale prononcée le jeudi 23 mars 2017.

6. [BONHOMME] 1993] BONHOMME R., 1993 The solar caracterization radiation: and distribution in the canopy in: VARLET-GRANCHER C., BONHOMME R., SINOQUET H.(Eds.), Crop structure and light microclimate: characterization and

applications, Sciences Update, INRA Editions, Paris, 1993, pp. 17-28

7. [Bouzoubaâ & M.Lachemi 2001] N.Bouzoubaâ and M.Lachemi. Self compacting concrete incorporating high volume of class fly ash: Preliminary results. Cement and Concrete Research, 31(3):413-420, 2001.

8. [Brasil & al.2001] A.M.Brasil, T.L.Farias, M.G.Carvalho and U.O.KOYLU. Numerical characterization of morphology of aggregated particles. Journal of Aerosol, 32(4):489-508, 2001.

9. [Bréda & al. 2002] Nathalie Bréda, Kamel Soudani, Jean –Claude Bergonzini. Mesure de l'indice foliaire en forêt, ECOFOR 2002 ; ISBN 2-914770-02-2.

10. [DOYON 2011] Julien DOYON, Simulation Numérique D'agrégats fractals en Milieu de Microgravité, Mémoire de Maitrise en physique, Université de Laval, QUEBEC 2011.

11. [Ducrey 1975] M. Ducrey, Utilisation des photographies hémisphériques pour le calcul de la perméabilité des couverts forestiers au rayonnement : I. Analyse théorique de l'interception. Annales des sciences forestières, INRA/EDP sciences, 1975, 32 (2), pp. 73-92

12. [DUCREY 1975b] DUCREY M, 1975 Utilisation des photographies hémisphériques pour le calcul de la perméabilité des couverts forestiers au rayonnement solaire. II. Etude expérimentale Annales des sciences forestières, INRA/EDP sciences, 32, 205-221. 1975b

13. [Eggersdorfer & al. 2010] M.l.Eggersdorfer,

D.Kadau,H.J.Hermann,andS.E.Pratsim is. Fragmentation and restructuring of soft-agglomerates under shear. Journal of Colloid and Interface Science, 342(2):261-268, 2010.

14. [Eric C. Anderson 1999] Eric C. Anderson, « Monte Carlo Methods and Importance Sampling », Lecture Notes for Stat 578C Statistical Genetics, 20 octobre 1999, p. 1 (moyenne empirique).

15. [Filippov, Zurita &Rosner 2000] A.V.Filippov, M.Zurita and D.E.Rosner. Fractal-like aggregates: Relation between morphology and properties. Journal of colloid and interface science, 229(1):261-273, 2000.

16. [Forest & Witten 1979] S.R.ForestandT.A.Witten. Long-range correlation in smoke-particle aggregates.J.PhysicsA: Math, Gen, 12:109,1979.

17. [Freltoft & Sinha 1986] T.Freltoft, J.K. K. Sinha. Power-law correlations and finite-size effects in silica particles aggregates studied by small-angle neutron scattering. Physical Review B,33(1):269-275,1986.

18.[Friedlander2000]S.Friedlander.Smoke, dust, and haze.Second Edition ,Oxford University PrSec, New York,2000.

19. [Gallias 2000] J.L.Gallias, R Kara-Ali,and J.P Bigas. The effect of fine mineral admixtures on water requirement of cement pastes. Cement and Concrete Research, 30(10):1543-1549, 2000.

20. [GOND 2002] Valéry GOND, Frédéric BARET, Boris RUELLE, Sacha WEBER. Utilisation de photographies hémisphériques sous le couvert forestier guyanais, Bois et Forêts Des Tropiques, 2002, N°274(4) PHOTOGRAPHIE/NOTE DE RECHERCHE

21. [Goodman & O'Rourke1995] Goodman and O'Rourke. Handbook of Discrete and Computational Geometry. Edited by Goodman and O'Rourke. CRC PRESS, 1997 (L'état de l'art. Complet et pointu. Idéal pour chercher un résultat).

22. [Graham 1972] R. L. Graham, An Efficient Algorithm for Determining the Convex Hull of a Finite Planar Set' [archive], Information Processing Letters 1, 1972, p. 132-133.

23. [GRANGEON 2006] Romain GRANGEON, Mesure de l'indice foliaire de la canne à sucre par deux méthodes indirectes (Stage au CIRAD), Master1 Université Montpellier 2(2005-2006)

24. [Julien & Botet 1987] R.julien and R. Botet. Aggregation and Fractal Aggregates,1987. ISBN 9971-50-248-8

25. [Kara-Ali 2002] R. Kara-Ali. Influence des additions minérales sur le besoin en eau et les résistances mécaniques des mélanges cimentaires. Thèse de doctorat. Université de Cergy-Pontoise, 2002.

26. [Kimbonguila 1993] Adolphe **KIMBONGUILA** MANOUNOU, Modélisation discrète de la microstructure des agglomérats de particules fines en suspension, thèse de doctorat de L'Ecole Nationale Supérieure des Mines DOUAI et l'Université de Lille 1,2013.

27. [KIMBONGUILA 1993] Adolphe KIMBONGUILA MANOUNOU, Modélisation discrète de la microstructure des agglomérats de particules fines en suspension, thèse de doctorat de L'Ecole Nationale Supérieure des Mines DOUAI et l'Université de Lille 1,2013.

28. [Ligot & Makels 2011] Gauthier Ligot et Benoit Makels, ULG ; Photographies hémisphériques, 28 novembre 2011

29. [Link & al. 2011] O.Link, D.R.Snelling, K.A. Thomson, and G.J.

Smallwood.Development of absolute intensity multi-angle light scattering for the determination of polydisperse soot aggregate properties. In Proceedings of the Combustion Institute, volume 33, pages 847-854,2011.

30. [Liu & al.2009] F.Liu, D.R.Snelling, and G.J.Smallwood. Effects of the fractal prefactor on the optical properties of fractal soot aggregates. In ASME Conference Proceedings, number n°43901, pages 363-371.2009.

31. [LOOTENS 2004] Didier LOOTENS, Ciments et suspensions concentrées modèles. Ecoulement, encombrement et floculation. Thèse de doctorat de l'université Pierre et Marie Curie Paris VI, octobre 2004.

32. [Mandelbrot 1983] B.B. Mandelbrot ; The fractal geometrie of nature.In Witt. Freemam, New York, 1983.(cite pages 7,25, 29, et 83)

33. [Mandelbrot 1998] B.B. Mandelbrot, les objets fractals : forme ,hasard et dimension, Flammarion, France 1989.

34. [Moutou 2020] MEMOIRE MASTER RECHERCHE MEI, Moutou Roger, 2020.

35. [Neville 2000] A-M. Neville. Propriétés des Bétons, traduction CRIB. Sherbrooke, canada, 2000.

36. [NGOMO 1991] NGOMO Macaire. Détermination de l'indice foliaire et de l'inclinaison moyenne des feuilles d'un couvert végétal par les photographies méthodes des hémisphériques de Bonhomme et de Ondock. Memoire de fin d'études de Maitrise (Master) d'ingénierie mathématiques.Département de Mathématiques et informatique, Université Louis Pasteur, Strasbourg I, 1991.

37. [Nicholas Metropolis 1949] Nicholas Metropolis et Stanislaw Ulam, « The Monte Carlo Method », Journal of the American Statistical Association, vol. 44, no 247, September 1949, p. 335-341 (DOI 10.2307/2280232).

38. [Nicholas Metropolis 1987] Nicholas Metropolis, « The Beginning of the Monte Carlo Method », Los Alamos Science, no 15, 1987, p. 125-130.

39. [O'Rourke 1998] Joseph O'Rourke, Olin Professor of Computer Science Joseph O'Rourke, Associate Professor of Computer Science Joseph O'Rourke. Computational Geometry in C. Cambridge University Press, 13 oct. 1998 - 376 pages. ISBN 0 521 64010 5 hardback, ISBN 0 521 64976 5 paperback

40. [Preparata & Hong 1977] F. P. Preparata ; S. J. Hong, « Convex Hulls of Finite Sets of Points in Two and Three Dimensions » [archive], 1977

41. [Preparata & Shamos 1984] F. Preparata and M. Shamos. Computational Geometry. Springer 1985. (Un des premiers ouvrages sur le sujet, un peu daté). (cf. Preparata et Shamos, 1984, pp 101-104)

42. [Preparata & Shamos 1985] F. Preparata and M. Shamos. Computational Geometry. Springer 1985. (Un des premiers ouvrages sur le sujet, un peu daté).

43. [QUEIROS-CONDE & al. 2015] DIAGO QUEIROS-CONDE, JEAN CHALINE, JACQUES DUBOIS, « Le monde des fractales », ellipses, 2015.

44. [ROSS 1981] ROSS J., 1981 The radiation regime and architecture of plantstandsDr Junk W, The Hague, The Netherlands

45. [Shapiro & al.2012] M.Shapiro, P.Vainshtein, D.Dutcher, M.Emery, M.Stolzenburg, D.Kittelson, and P.McMurry.Characterization of agglomerates by simultaneous measurement of mobility, vacuum aerodynamic diameter and mass. Journal of Aerosol Science,44:24-45,2012.

46. [Sorensen & al. 1992] C.M.Sorensen, J. Cai, and N.Lu. Light-Scattering measurements of monomer size, monomers per aggregate, and fractal dimension for soot aggregates in flames. Appl. Opt., 31(30):6547-6557, 1992.

47. [Sorensen & Roberts 1997] C.M.Sorensen and G.C.Roberts. The prefactor of fractal aggregates. Journal of colloid and interface science, 186(2):447-452,1997.

48. [Sorensen 2001] C.M.Sorensen.Light. Scattering by fractal aggregates: A review, Aerosol Science and Technology, 35(2):648-687, 2001.(cite page 25).

49. [Soudani, Trautmann & Walter 2006] Kamel Soudani, Jean Trautmann, Jean-Michel Walter. Comparaison de méthodes optiques pour estimer l'ouverture de la canopée et l'indice foliaire en forêt feuillue, C.R.Acad.Sci. Paris, Science de la vie/Life Sciences 324(2001) 381-392

50. [Thill 2006] A.Thill. Aggregation des particules: structure, dynamique et simulation. Application au cas d'un écoulement stratifié : l'estuaire du Rhone , thèse de doctorat, Université de droit, d'économie et des sciences-Aix-Marseille III, 2006

51. [VanGulijk & al. 2004] C.VanGulijk, J.C.M. Marijnissen, M. Makkee, J.A. Moulijn, and A. Schmidt-Ott. Measuring diesel soot with a scanning monbilityparticlesizer and an electrical low-pressure imimpact:Performance assessment with model for fractal-like а agglomerates. Journal of Aerosol Science, 35(5):633-655, 2004.

52. [Veerapaneni & Wiesner 1996] S. Veerapaneni and M.R. Wiesner. Hydrodynamics of fractal aggregates with radially varying permeability. Journal of colloid and interface science, 177(1): 45-57,1996.

53. [Vicsek 19921] Vicsek,T. Fractal Growth phenomena, World Scientific, 1992,488p.(Cite pages 26 et 29)

54. [Weitz & M.Olivera 1984] D.A .Weitz and M.Olivera. Fractal structures formed bv kinetic of aggregation aqueous gold colloids.Physical Review Letters.52(16):1433-1436,1984.

55. [Wozniak & al. 2012] M. Wozniak,F.R.A. Onofi, S.Barbosa, J. Yon, and J.Mrczka. Comparaison of methods to derive morphological parameters of multi-fractal Samples of particle aggregates from tem images .Journal of Aerosol Science,47(0):12-26,2012.